Τσαμιάτος 15.2.16

• Εισαγωγικά σε νόρμες - μετρικές συναρτήσεις •

Ορ. Έστω $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$, E διαν. χώρος και $\bar{x}, \bar{y}$

Η συνάρτηση ρ καλείται μετρική στον E, αν και μόνο αν:

- $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$
- $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$ (συμμετρία μετρικής)
- $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$ (τριγωνική ανισότητα μετρικής)

Παρατήρηση: $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \dfrac{\rho(\bar{x},\bar{y}) + \rho(\bar{x},\bar{y})}{2}$

$$\overset{\text{συμ}}{=} \frac{\rho(\bar{x},\bar{y}) + \rho(\bar{y},\bar{x})}{2} \underset{\text{τρ. ανισ}}{\geq} \frac{\rho(\bar{x},\bar{x})}{2} = 0$$

Άρα, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$, $\forall\, \bar{x}, \bar{y} \in E$.

Ορισμός: Οι __τιμές__ $\rho(\bar{x}, \bar{y})$, μιας μετρικής ρ στον δ.χ E, καλούνται __αποστάσεις__ στο $\mathbb{R}$.

Ορ. Έστω $N : E \to \mathbb{R}$, E διαν. χώρος και $\bar{x}, \bar{y} \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση N καλείται στάθμη ή νόρμα στον E, αν και μόνο αν:

- $N(\bar{x}) = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$
- $N(\alpha\bar{x}) = |\alpha| N(\bar{x})$
- $N(\overline{x+y}) \leq N(\bar{x}) + N(\bar{y})$

Πρόταση: Έστω $N : E \to \mathbb{R}$, E δ.χ, με N νόρμα στον E. Η $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = N(\bar{x} - \bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in E$, είναι μετρική στον E.

(Με άλλα λόγια, εφόσον ένας διαν χώρος είναι σταθμητός, τότε είναι και μετρικός.)

[Απόδειξη πρότασης]

Είναι, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \iff N(\bar{x} - \bar{y}) = 0 \iff \bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \iff \bar{x} = \bar{y}$, άρα πληρείται η πρώτη ιδιότητα μετρικής στον E

Είναι, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = N(\bar{x} - \bar{y}) = N((-1)(\bar{y} - \bar{x}))$

$= |-1| N(\bar{y}, \bar{x}) = N(\bar{y}, \bar{x}) = \rho(\bar{y}, \bar{x})$, άρα πληρείται στον E και η δεύτερη ιδιότητα μετρικής.

Είναι, $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = N(\bar{x} - \bar{y}) = N(\bar{x} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{y}) \leq N(\bar{x} - \bar{z}) +$
$N(\bar{z} - \bar{y}) = \rho(\bar{x}, \bar{z}) + \rho(\bar{z}, \bar{y})$, άρα πληρείται στον E

και η τρίτη ιδιότητα μετρικής.

Συμπέρασμα: $\rho(\bar{x},\bar{y}) = N(\bar{x}-\bar{y})$, μετρική στον E

Παραδείγματα

$$\rho_1 : E\times E \to [0,+\infty) \text{ με } \rho_1(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} 0, & \bar{x}=\bar{y} \\ 1, & \bar{x}\neq\bar{y} \end{cases}$$

(διακριτή μετρική στον E).

Επαλήθευση:

Είναι, $\rho(\bar{x},\bar{y}) = 0 \overset{\text{op.}}{\Longleftrightarrow} \bar{x}=\bar{y}$ (1)

Είναι, $\rho(\bar{x},\bar{y}) \overset{\text{op}}{=\!=} \rho(\bar{y},\bar{x})$ (2) (συμμετρία στον τύπο των $\bar{x},\bar{y}$)

Είναι $\rho(\bar{x},\bar{y}) \leq \rho(\bar{x},\bar{z}) + \rho(\bar{z},\bar{y})$ (Ισχυρισμός)

Απόδειξη ισχυρισμού.

Αν $\bar{x}=\bar{y}$ τότε $\rho(\bar{x},\bar{y}) = 0 \leq \rho(\bar{x},\bar{z}) + \rho(\bar{z},\bar{y})$

Αν $\bar{x}\neq\bar{y}$ τότε δε μπορεί να ισχύει $\rho(\bar{x},\bar{z}) = \rho(\bar{z},\bar{y}) = 0$

γιατί θα είχαμε ότι $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$.

Επομένως, κάποιο από τα $\rho(\bar{x},\bar{z})$, $\rho(\bar{z},\bar{y})$ είναι 1,
από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\rho(\bar{x},\bar{y}) = 1 \leq \rho(\bar{x},\bar{z}) + \rho(\bar{z},\bar{y})$$